Положим величину альфа равной нулю, хотя, во-первых, альфа равной нулю быть не может, а во-вторых, ее обращение в нуль противоречило бы основам механики.

Э. Шрёдингер «Статистическая термодинамика»

Математическая физика и компьютерная математика.

Е.М. Левич

XX век ознаменовался бурным развитием различных физических теорий. Согласно замечанию М. Бунге, « в физической теории нет ничего, кроме математического формализма, снабженного физической интерпретацией и способного к сосуществованию с другими теориями и могущего быть проверенным экспериментом» (1, с. 39). Подобное утверждение, но уже о характерных сторонах физического знания принадлежит Г. Вейлю. Г. Вейль, один из крупных математиков и физиков-теоретиков XX века, утверждал, что наиболее продуктивные, содержательные сдвиги в теоретической физике происходили благодаря трем факторам, формирующих физическое знание: математического конструирования, изощренной экспериментальной техники, сущностного анализа, которое можно истолковать как понимание или интерпретацию. Ни одна из этих фундаментальных сторон не может быть без ущерба изъята из физического знания, которое, стало быть, выражено трояко: в математической форме, в экспериментальной ситуации и в «смысле». Очевидно, что каждая из этих сторон тесно связана с остальными сторонами.

Большое значение при построении физической теории играет проверка следствий из этой теории с помощью экспериментов. Эта проверка состоит в сравнении численных результатов эксперимента с вычислениями, проведенными на основании теории. При проверке мы сталкиваемся с вычислительными проблемами двух типов. *Первый тип* проблем связан с оценкой качества численных результатов экспериментов. На эти результаты существенно влияют те ограничения, которые накладываются на сам процесс проведения экспериментов. Эти ограничения включают в себя, в частности, и те, которые связанны с качеством измерений. *Второй тип* проблем связан с ограничениями, которые возникают при проведении вычислений на основе теоретической модели. В силу этих проблем только в очень редких случаях результаты теоретических расчетов совпадают с численными экспериментальными данными.

Проблемы, относящиеся к первому типу, достаточно широко обсуждаются в специальной литературе. Гораздо меньшее внимание уделяется проблемам второго типа, которые часто даже не формулируются достаточно ясно.

Настоящая статья посвящена обсуждению проблем второго типа. В рамках этого обсуждения мы, прежде всего, сосредоточим наше внимание на более точном формулировании возникающих при вычислении проблем. В частности, наше обсуждение сводится к выяснению следующего вопроса: в какой мере математический метод решения определенной задачи дает в результате его применения к конкретной задаче тот результат, который он декларирует? Например, в какой мере результат численного решения дифференциального уравнения с помощью конкретного метода можно считать решением заданного уравнения? Дополняя последний вопрос, можно спросить, в какой мере результат численного решения дифференциального уравнения с помощью компьютерной программы и определенного типа компьютера можно считать решением заданного уравнения? В заключение можно спросить, не является ли этот полученный численный результат просто «шумом»?

Поставленные вопросы были вызваны тем, что в современной литературе обычно при обсуждении анализа результатов вычисления не обращают обычно внимание на то, что при экспериментальной проверке физической теории используется не просто математический формализм, т.е. определенная математическая модель, а совокупность связанных между собой математических моделей различного типа, отличающихся друг от друга языком моделирования, а также и способом исследования. Эта совокупность моделей состоит: из теоретической математической модели, которая представляет собой физическую теорию; вычислительной модели математического алгоритма, решающего поставленную вычислительную задачу; программы, т.е. модели на языке программирования, переводящей вычислительную модель с математического языка на язык компьютера; компьютерной модели, получающейся в результате перевода математической модели на компьютерный язык. Все эти модели связаны друг с другом, и их использование может существенно влиять на результат вычислений.

Для оценки влияния вычислительного процесса необходим специфический язык, связанный с природой рассматриваемых моделей. Ниже делается попытка построить этот язык, с помощью которого формулируются основные проблемы, связанные с вычислениями. Обоснование такого подхода лучше всего проводить с помощью рассмотрения исторического развития некоторых основных понятий физики и математики.

1. Современная математика неразрывно связана с физикой. Поэтому теоретические достижения физиков существенно зависят от того математического аппарата, который они используют. В глазах физиков математика представляет собой единое здание, в рамках которого не только можно доказывать теоретические утверждения, но и получать численные результаты, используя, если это необходимо, компьютеры.

Однако современная математика не представляет собой монолита, а состоит из нескольких типов «математик», которые отличаются друг от друга не только целями, но и основными объектами исследования: *теоретическая математика*, *прагматическая математика* и *компьютерная математика*. Объединяющим эти типы служит то, что в каждом из них основными объектами исследования являются так называемые «числа». Смысл, который вкладывается в это понятие, в разных типах математики различен, поэтому они отличаются друг от друга своими свойствами и областями применимости.

Необходимо отметить, что в современной науке, к понятию числа относятся недостаточно строго, рассматривая его как некое единое понятие, которое отражает определенные количественные сущности. Для иллюстрации сказанного достаточно обратиться к определению математики, данное А. Колмогоровым в статье «Математика» в БСЭ, или к статье «Математика» в Математической энциклопедии (2, т.3, с.560-564). Однако при внимательном рассмотрении исторического развития математики можно увидеть, что в действительности существовали и существуют несколько различных типов объектов, которые исторически принято называть числами и которые не всегда имеют отношение к количествам.

Широко распространено мнение, что математические знания, т.е. то, что сегодня называют математическими объектами, существовали уже в древних цивилизациях. В качестве примера обычно приводятся египетская, шумерская и вавилонская математика. Основным аргументом в этом случае является то, что в этих цивилизациях решали количественные практические задачи, т.е. «считали».

Однако всякая хозяйственная жизнь *любой человеческой цивилизации* с древнейших времен связана с измерением количеств. Для обозначения количеств в каждом языке есть специальные словосочетания, которые мы будем называть *количественными прематематическими именованными числами*. В качестве примеров можно привести: два барана, три человека, десять птиц и т.п. Эти числа выражают количественную сущность в единицах измерения. Человечество на опыте научилось складывать одноименные количества, а также из большего количества вычитать меньшее, имеющее одно и то же наименование. В более сложных ситуациях использовалось умножение количественных чисел.

Решение количественных практических задач будем называть *прематематикой*. Каждая человеческая цивилизация обладает своей прематематикой. В силу сказанного, то, что обычно называют египетской или вавилонской математикой, были на самом деле прематематиками.

Количественные прематематические числа существовали до появления математики в любой человеческой цивилизации, а также существуют и сегодня. Именно для того, чтобы подчеркнуть этот факт, этот тип чисел и назовем *прематематическими числами*. *Введенные числа существуют* ***вне*** *математики и не имеют к ней никакого отношения*.

В подтверждение сказанному, сделаем несколько замечаний относительно количественных прематематических чисел.

Во-первых, среди этих чисел, в общем случае, нет нуля и отрицательных чисел. Это означает, что в практических задачах обычно *не используются* отрицательные именованные числа. Исключения впервые появляются в средние века у индийцев, которые использовали отрицательные количественные прематематические именованные числа для обозначения денежных долгов.

Во-вторых, *сложение* количественных прематематических именованных чисел принципиально отличается от сложения чисел в математике. Поясним это отличие на примере:

$$2 \text{ барана} + 3 \text{ барана} = 3 \text{ барана} + 2 \text{ барана}. \qquad (1)$$

Если мы рассматриваем (1) как сложение прематематических чисел, то равенство (1) получается на основе опыта, ибо правая и левая части равенства равны одному и тому же прематематическому числу – 5 баранов, что имеет чисто реальный, практический смысл. В этом случае равенство (1) индивидуально, т.е. является неким фактом, и из него никоим образом не следует никакое другое равенство.

Если же мы рассматриваем (1) как сложение двух математических чисел, то равенство (1) вытекает как следствие из аксиомы коммутативности сложения двух математических чисел. Другими словами, утверждение (1) есть редукция из более общего утверждения.

Резюмируя сказанное, равенство (1) в случае прематематических чисел получается *индуктивным* путем, а в случае математических чисел – *дедуктивным* путем.

В разных древних цивилизациях использовались и части количества. Например, половина количества, четверть или восьмая часть. Для их обозначения употреблялись специальные символы. Эти части не являлись дробями в современном понимании, а просто символами для обозначения частей некоторого количества. В этом смысле их также можно рассматривать как именованные числа.

В практической жизни часто встречаются числа другого типа, отличающие от количественных прематематических именованных чисел. Этот тип чисел используется для упорядочивания объектов в соответствующей совокупности реальных объектов. Например, упорядочивание стада баранов происходит с помощью следующих чисел: первый баран, второй баран и т.п. Эти числа мы будем называть *порядковыми именованными прематематическими числами*. Ясно, что. По своей сути, они принципиально отличаются от количественных прематематических чисел. Собственно, этот тип чисел стали рассматривать как числа только в XIX веке.

Ниже мы будем рассматривать только количественные прематематические числа. Поэтому для упрощения формулировок мы опустим слово «количественное» и будем говорить «прематематическое число».

В заключение пункта остановимся вкратце на процессе решения конкретной количественной прикладной задачи. Примеры таких задач и процесс их решения можно увидеть, например, в египетских папирусах: папирусе Райнда и Московском папирусе. Процесс решения таких задач является *всегда* инструкцией, указывающей порядок выполнения арифметических действий над конкретными числами и промежуточными числовыми результатами. В современном изложении эту инструкцию можно представить в виде равенства, где в левой части стоит искомая величина, а в правой части стоит выражение из конкретных чисел, соединенных знаками арифметических операций, и скобок, указывающих порядок выполнения действий. Такую формулу назовем *прематематической формулой*. Любая прематематическая формула – это результат опыта решения практических задач и общественного согласия.

Прематематическая формула, как объект для использования при решении задач, не могла существовать раньше двух с половиной столетия тому назад. Мы это понятие будем использовать для удобства дальнейшего изложения.

2. Как известно, математику создали греки. При ее создании греки не преследовали никаких практических целей. Для решения практических задач у греков была *логистика*, которая в процессе решения количественных задач использовала прематематические числа. Математикой у греков занимались только состоятельные люди, для которых она служила одним из видов интеллектуального искусства, а решением практических задач – рабы и метеки (свободные люди, не являющиеся гражданами). Эта традиция сохранялась вплоть до XVIII в. в Европе, когда математикой занимались профессора, монахи и состоятельные люди.

Греческая математика своим рождением обязана Пифагору и его религиозной секте, где она составляла часть религиозного культа: занятия математикой входили составной частью в процесс очищения души. Отметим, что в эту секту принимались только те люди, которые были способны заниматься математикой. Другими словами, эта была первая математическая школа, которая просуществовала несколько веков.

Наличие школы и многочисленных учеников – это те условия, необходимые для того, чтобы математика из индивидуального учения и занятия превратилась в общественное занятие. Трудно себе представить другую более благоприятную ситуацию для возникновения и развития математики как общественного занятия. Во всяком случае, в истории интеллектуального развития человечества невозможно отыскать ничего подобного. Конечно, в истории человечества можно найти такие мистические учения и религии, в основании которых главную роль играли харизматические личности.

Некоторые из них существуют и по сей день, но эти религии и учения не дали человечеству в интеллектуальном плане ничего подобного, сравнимого с математикой. Резюмируя вышесказанное, отметим, что математика смогла стать теоретической наукой только благодаря тому, что она при своем возникновении была частью некой религии, от которой впоследствии отделилась.

Более столетия учение Пифагора было тайным. Поэтому трудно сказать, что из наследства ранних пифагорейцев принадлежит самому Пифагору, а что – его ученикам. Значительное влияние Пифагор и его секта оказали также и в создании и развитии одного из основных направлений в философии вообще. Очень точно значение Пифагора выразил один из крупнейших математиков и философов XX века Б. Рассел в своей «Истории западной философии»: « Я не знаю другого человека, который был столь влиятельный в области мышления, как Пифагор. … С Пифагора начинается вся концепция вечного мира, доступного интеллекту и недоступного чувствам. Если бы не он, то христиане не учили бы о Христе как о Слове; если бы не он, теологи не искали бы логических доказательств бытия бога и бессмертия души» (3, с. 56).

Пифагорейцы заложили основы пяти направлений математических исследований: *теории чисел*, *геометрии, теории музыки, геометрической оптики и геометрической астрономии (или астрологии)*.

Теория чисел. В основе пифагоровой теории чисел лежит понятие числа, которое мы назовем *пифагоровым числом*. Пифагоровы числа отличаются от прематематических именованных чисел уже тем, что они являются неименованными числами. Они также отличаются и от математических чисел по нескольким причинам.

Во-первых, для пифагорейцев числа выражали некую мистическую сущность. Например, брак выражается числом 5, так как оно есть результат сложения первого женского (четного) числа 2 и первого мужского (нечетного) числа 3. Любовь и дружба выражается числом 8, так как гармония находит свое выражение в октаве.

Аристотель в своей «Метафизике» так охарактеризовал пифагорейское отношение к числам:

«… так называемые пифагорейцы, занявшись математическими науками, впервые развили их и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей. Но в области этих наук числа занимают от природы первое место, а у чисел они усматривали, как им казалось, много сходных черт с тем, что существует и происходит, - больше чем у огня, земли и воды; например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то – душа и ум, другое – удача, и можно считать, что в каждом из остальных случаев точно так же. Кроме того, они видели в числах свойства и отношения, присущие гармоническим сочетаниям. Так как, следовательно, все остальное явным образом употреблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную признали гармонией и числом» (4, кн. 1, гл. 5, с. 44).

Во-вторых, ни единицу, ни двойку пифагорейцы не считали числом, ибо они выражали четко определенные философские сущности. Единицу пифагорейцы ставили в особое положение: единица для них – это не просто число, как все числа, а начало чисел; чтобы стать числом, все должны приобщиться к единице – она же единство. «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым». Это определение единицы, которое дает Евклид в «Началах». Двойка или двоица также имели определенный философский смысл, связанный с противопоставлением. Числа начинались с тройки. Такая ситуация, например, с единицей продолжалась даже в XVIII веке. В частности, Ньютон не считал единицу числом.

В-третьих, среди пифагоровых чисел нет дробных чисел. Это утверждение вытекает из особого положения единицы, которую по философским причинам нельзя делить на части.

Теория чисел Пифагора ввела в рассмотрение ряд совершенно новых понятий: четные и нечетные числа, простые и сложные числа, совершенные числа и т.п. Эти понятия не встречаются ни в египетской, ни в вавилонской цивилизациях. Поэтому она является чисто греческим изобретением.

Геометрия. Греческая геометрия представляет собой подлинную интеллектуальную жемчужину, которая уже более двух тысяч лет поражает человечество своей красотой. Ни одной другой цивилизации, ни до и ни после греческой цивилизации, не удалось создать ничего похожего. За исключением двух последних столетий термин «геометрия» был синонимом слова «математика».

Геометрия представляет собой интеллектуальную игру, в которую можно непрерывно играть как индивидуально, так и в коллективе. Целью этой игры является получение интеллектуальных утверждений – теорем – с помощью особых правил. Эти правила легли в основу греческого способа мышления, которое оказало решающее влияние на формализацию процессов человеческого мышления и стало интеллектуальной основой научно-технического процесса всего человечества. Ярким доказательством сказанного служит тот факт, что по сей день во всех школах мира изучают несколько лет греческую геометрию только для того, чтобы подрастающее поколение овладело основами формального греческого мышления. Интересно, что это изучение часто происходит с помощью сокращенного изложения дошедшего до нас одной из самых знаменитых греческих книг «Начал» Евклида, написанной в III в. до н.э.

Остальные три направления математических исследований, у основания которых стояли пифагорейцы – теория музыки, геометрическая оптика, геометрическая астрономия (астрология) – являлись, по своей сути, специальными разделами геометрии. В основе греческой *теории музыки* лежит открытие, приписываемое Пифагору, гласящее, что колеблющие струны производят при одинаковом натяжении гармоническое созвучие в том случае, когда их длины находятся в простом рациональном отношении. Она занималась вопросами связи различных типов гармонии с соотношениями длин струн. Принципиальное развитие этой науки достаточно быстро закончилось, хотя работы, относящиеся к ней, можно встретить и через много веков.

Геометрическую оптику можно рассматривать как первую теоретическую физическую теорию, построенную как аксиоматическая теория. В качестве аксиом этой теории были приняты ряд законов отражения и преломления лучей света. Эта теория вызвала такой интерес у античных математиков, что значительное число античных математиков в той или иной степени занимались ею.

Геометрическая астрономия началась с теоретической модели вселенной, разработанной пифагорейцем Евдоксом Киндским. Эта теория качественно воспроизводила особенности движения пяти известных планет, Солнца и Луны: суточное вращение небесной сферы, движения светил вдоль эклиптики с запада на восток с различными скоростями, изменения широты и попятные движения планет. Движения светил в ней управлялись вращением небесных сфер, к которым они прикреплены, сферы обращались вокруг единого центра (Центра Мира), совпадающего с центром неподвижной Земли, имели один и тот же радиус, нулевую толщину и считались состоящими из эфира.

Трудно переоценить значение модели Евдокса для развития человеческих знаний об окружающей нас Вселенной. *Во-первых*, она – первая модель, которая бросает взгляд в целом на всю известную Вселенную. Все дальнейшие теоретические модели Вселенной, вплоть до настоящего времени, имеют своей отправной точкой модель Евдокса. *Во-вторых*, она - *первая математическая модель*, которая была использована в астрономии (астрологии).

Следующий принципиальный шаг в астрономии был сделан Гиппархом, который впервые в истории стал сверять различные гипотезы, полученные из различных теорий, с результатами наблюдений. Он построил впервые математическую модель, с помощью которой можно было рассчитывать текущие координаты движения Солнца и Луны для любого момента времени. Однако ему не удалось построить аналогичные модели для планет из-за отсутствия соответствующих наблюдений. Гиппарх был первым, построившим численные астрономические таблицы.

Работа, начатая Гиппархом, была завершена через три века К. Птолемеем, который усовершенствовал и расширил модель Гиппарха, приспособив ее и для расчета координат движения планет в различные моменты времени. Для вычисления координат светила в конкретный момент времени Птолемей построил специальные таблицы. Любая величина, заключенная в таблице, получалась в результате непростых вычислений.

Построение этой системы и сама система описана в его труде «Математическое сочинение в 13 книгах», которое больше известно под арабским названием «Альмагест». Трудно привести пример такой книги в мире не может соперничать с «Альмагестом» по глубине и продолжительности влияния на научное развитие человечества, и ни одно сочинение, за исключением «Начал» Евклида, не обрело столь беспрекословного научного авторитета.

Как мы уже отмечали, все основные теоретические математические результаты были практически получены в течение трех веков с появления математики. После этого не было получено ни одного принципиального математического результата. Это объясняется тем, что греческая цивилизация приближалась к своему закату. Единственным исключением, которое противоречит сказанному, является появление «Арифметики» Диофанта, которая открыла совершенно новую область для математических исследований.

«Появление Диофанта составляет до сих пор одну из самых темных загадок истории науки. Труды Диофанта представляют полную неожиданность и по постановке задач, и по методам их решения, и по геометрической трактовке величин и действий над ними», - пишется в первом томе «Истории математики» (5, с. 144).

«Арифметика» Диофанта посвящена решению абстрактных задач, заданных в виде отдельных уравнений и систем уравнений. Методы решения, которые применял Диофант, были *индуктивными*: он указывал способ решения конкретной задачи, предположительно пригодный для решения более широкого круга задач, границы которого не были определены. Для всех задач Диофант ищет численные решения. Здесь мы встречаемся с определенным типом чисел, которые назовем *диофантовыми*.

Диофантовы числа – это неименованные числа, ибо среди задач, которые встречаются в «Арифметике» нет ни одной практической задачи и ни одной задачи с именованными числами. Поэтому диофантовы числа отличаются от прематематических чисел, поскольку последние – это именованные числа.

Содержание всех задач в книге является абстрактным. Тогда и диофантовы числа являются абстрактными объектами, не имеющими никакого чувственного содержания. Этим диофантовы числа отличаются от пифагоровых чисел, которые можно рассматривать как мистические символы. Другим отличием диофантовых чисел от пифагоровых, является то, что единица и двойка считаются диофантовыми числами.

Диофантовы числа были трех видов: целые, дробные и смешанные. Одним из величайших достижений александрийских математиков во времена, предшествующих появлению Диофанта, является введение в рассмотрение дробей как абстрактных объектов, т.е. объекты, в которые не вкладывается никакое содержание и которые представляют собой просто символы.

При решении некоторых задач Диофант использует в промежуточных результатах объекты, похожие на отрицательные числа, которые он трактует как недостаток. Для действий над отрицательными числами он вводит определенные правила, хотя это не афишируется. Позже, индийцы и мусульмане, развивая диофантову арифметику, стали использовать отрицательные числа как равноправные объекты исследований.

Резюмируя сказанное в этом пункте, отметим четыре основных момента. *Во-первых*, греки изобрели дедуктивный метод, который лег в основу математического доказательства. Использование дедуктивного метода является характерной чертой математики. Поэтому то, что сегодня называют египетской, вавилонской, индийской, китайской математиками, по своей сути не являются математиками, так как в них не используется дедукция. *Во-вторых*, греки в теоретической математике использовали только пифагоровы и диофантовы числа. *В-третьих*, в модели Гиппарха-Птолемея использовались прематематические числа. *В-четвертых*, греческая математика представляла собой набор разных математик, отличающихся друг от друга или объектами изучения, или типом используемых чисел.

3. К середине первого тысячелетия нашей эры греческая культура на территории западной Европы и Египта перестала существовать. Некоторые очаги этой культуры можно было найти на территории Сирии и Византии. Часть греческих ученых бежала в Персию и далее в Индию. На Востоке местных правителей, прежде всего, интересовала, кроме греческой медицины, греческая астрология, основанная на системе Гиппарха-Птолемея. Одним из свидетельств этому служит тот факт, что первый перевод «Альмагеста» был осуществлен в Персии при дворе Шапура I уже в середине III века. Математика возродилась в V-VI веках в Индии, где очутились некоторые александрийские математики, которые стали передавать свои знания местным ученым. Здесь и появились первые астрономо-математические книги на индийском языке и стали известны под именем «сиддханта». Индийцев интересовала из математики только диофантова арифметика, с которой их познакомили греки.

Основным достижением индейцев в решении практических количественных задач является введение в использование десятичной позиционной системы записи чисел.

Как видно из сказанного, индийцы практически ничего не внесли в развитие собственно математики, ибо их интересы, прежде всего, были сосредоточены в прематематике. Основным их достижением было то, что они «разбудили» интерес к математике в Месопотамии среди арабов.

Математика начинает жить в Месопотамии с перевода индийских книг только во время ислама, начиная с VIII века, когда были образованы арабские халифаты, управляемые халифами, которые покровительствовали искусству и науке. Их интерес к греческой математике возник прежде всего из-за интереса к греческой астрологии. «Альмагест» был одной из первых греческих книг, переведенных на арабский язык. Но «Альмагест» - это учебник главным образом теоретической астрономии. Он предназначен для уже подготовленного читателя, знакомого с геометрией Евклида, сферикой (сферической геометрией) и логистикой. И поэтому для глубокого ознакомления с греческой астрологией необходимо было познакомиться с основными греческими математическими произведениями, что привело к переводу их на арабский язык. Так были спасены основные математические произведения от забвения.

Ознакомление арабов с математикой мало, что дало для развития математики в методологическом плане. Как и индийцы, арабы в основном занимались развитием алгебраического направления, идущего от Диофанта. Не сумев овладеть дедуктивным методом, они не занимались геометрией. Все свои рассуждения они производили либо на основании аналогии, либо на основе опытных проверок.

Как и в случае индийцев, можно сказать, что основным достижением ученых стран ислама является то, что они сохранили греческое наследие в своих книгах и переводах и в соответствующее время передали их европейцам.

4. Европейцы впервые стали знакомиться с греческим наследством в оригинальных произведениях греческих авторов начиная с крестовых походов, а также с начала захвата европейцами Испании. Так первый перевод «Начал» Евклида был произведен в XII веке. В это же время европейцы стали знакомиться с философией Аристотеля по оригинальным произведениям, в частности, с логикой Аристотеля. Это знакомство оказало значительное влияние на развитие католической теологии, ибо дедуктивное доказательство стало одним из основных способов теологических рассуждений. Стали появляться теологические доказательства существования Бога. Труды Аристотеля, включая произведения, излагающие его логику, стали изучаться на богословских факультетах университетов. Все это создало методологическую базу для освоения математики, а прежде всего геометрии, европейцами.

Здесь мы сталкиваемся, можно сказать, с чудом, когда после почти тысячи лет забвения геометрия, которая была просто интеллектуальной игрушкой или игрой у древних греков, стала оживать на новой почве. Потребовалось несколько столетий, чтобы вновь появившиеся европейские математики достигли и превзошли в своих исследованиях уровень греков и ученых стран ислама.

5. Теперь вкратце остановимся на возникновении физики. Она возникла как часть *натурфилософии* древних греков в VII-VI вв. до н.э. Возникновение физики вместе с философией и математикой является одним из выражений греческого чуда, греческой интеллектуальной революции. Ни у какого другого народа в истории человеческой цивилизации мы не встречаем ничего подобного. Ф. Розенбергер в своей «Истории физики» писал: «Только свободному гению греков, искавших повсюду познаваемую связь явлений, оказалось по силам основать науку о природе, и ему же исключительно принадлежит создание древней физики. … Их изумительно сильный ум побуждает их искать и дает возможность найти объяснение для всех явлений природы и открыть между ними закономерную связь» (6, с. 31).

Суть понимания задач и методологии физики греками очень четко выразил великий греческий философ Аристотель в самом начале своей книги «Физика»:

«Так как знание, и [в том числе] научное познание, возникает при всех исследованиях, которые простираются на начала, причины и элементы, путем их уяснения (ведь мы тогда уверены, что знаем ту или иную вещь, когда уясняем ее первые причины, первые начала и разлагаем ее вплоть до элементов), то ясно, что и в науке о природе надо попытаться определить прежде всего то, что относится к началам. Естественный путь к этому ведет от более понятного и явного для нас к более явному и понятному по природе: ведь не одно и то же понятное для нас и [понятное] вообще. Поэтому необходимо продвигаться именно таким образом: от менее явного по природе, а для нас более явного к более явному и понятному по природе. Для нас же в первую очередь ясны и явны скорее слитные [вещи], и уж затем из них путем расчленения становятся известными элементы и начала. Поэтому надо идти от вещей [воспринимаемых] в общем, к их составным частям: ведь целое скорее уясняется чувством, а общее есть нечто целое, так общее охватывает многое наподобие частей» (7, с. 61).

Натурфилософия греков началась с поисков первоначал. Фалес, Анаксимандр, Анаксимен, Гераклит, Пифагор, Анаксагор, Эмпедокл и другие предлагали различные виды первоначал. Большое внимание греки уделяли поиску объяснению изменения веществ. Предлагая различные объяснения изменению веществ в природе, греки в лице Левкиппа и Демокрита пришли к атомной гипотезе.

Построение греческой физики завершил, по существу, Аристотель в своей «Физике». Здесь он построил механику, которая послужила человечеству практически без изменения в течение более двух тысячелетий. Отметим, что Аристотель при построении своей механики не пользовался математикой. Из последующих греческих ученых отметим Архимеда, который внес определенный вклад в некоторые области геометрической физики.

В заключение отметим, что все физические исследования греков носили чисто теоретический характер. Опыты их носили чисто случайный характер без всякой связи с какой-либо теорией.

6. Натурфилософы во главе с Аристотелем и математики заимствовали свои основы из опыта повседневной жизни, из материала, открытого непосредственному наблюдению. Экспериментального метода, самостоятельно создающего эти основы, в то время не существовало. Если в отдельных случаях и производились систематические опыты, то лишь для измерения количественных сторон явлений; опытного же исследования явлений, наблюдений в смысле физического метода, не существовало. В то время полное совпадение философской теории с прямым опытом почти роняло ее достоинство, а расхождение между ними никого не смущало. Это привело к тому, что хотя опытов производилось немало, и даже опытов весьма искусных, физика как бы стояла в стороне от них.

В XVII веке произошли глубокие изменения в физике. Для того чтобы эти изменения произошли необходимо, во-первых, чтобы они «витали в воздухе», а во-вторых, были созданы необходимые технические средства для их осуществления. Необходимость в новом подходе к физике было вызвано тем, что механика в схоластическом объяснении уже не удовлетворяла ученых и ее ограничения сдерживали дальнейшее развитие и применение (в частности, в артиллерии). С другой стороны, к этому времени были изобретены новые технические средства в математике. *Во-первых*, в конце XVI века Виет ввел в рассмотрение уравнения с буквенными коэффициентами, что привело к появлению математических формул. *Во-вторых*, в том же веке практически все вычисления стали проводиться над числами, представленными в десятичной позиционной системе. *В-третьих*, Стевен ввел в рассмотрение десятичные дроби, что резко упростило проведение вычислений.

Под *формулой* понимается равенство двух выражений, каждое из которых состоит из набора букв, соединенных между собой арифметическими операциями и скобками. Под *вычислительной формулой* будем понимать формулу, левая часть которой состоит из одной буквы, не входящей в выражение, стоящее в правой части. Подставляя вместо букв в выражение, стоящее в правой части, конкретные числа, можно вычислить численное значение буквы в левой части вычислительной формулы. Этот процесс можно назвать конкретным вычислением вычислительной формулы.

В начале XVII столетия произошедшие в физике изменения, прежде всего, были связаны с именем Г. Галилея, главным вкладом которого в европейскую культуру были изменения и усовершенствования, которые он внес в научный метод. Наиболее значительным и революционным из них являлся отказ от поисков физического объяснения, которое Аристотель считал истинной целью физики, и переход к поиску математического описания явления.

Принятое Галилеем решение ограничиться описанием явления было наиболее глубоким и плодотворным новшеством, которое было внесено в научную методологию. *Описание* физического явления на каком-то языке (например, математическом) в современном понимании является *моделью*. Введя в рассмотрение описание физического объекта, Галилей *заменяет* объект исследования: реальный объект на модель. Такая замена является подлинной революцией в познании.

Галилей рекомендовал в качестве языка моделирования математику. Описание физического явления на математическом языке привело к понятию физического закона. *Под физическим законом понимается математическая формула, связывающая между собой ряд измеряемых физических характеристик*. В случае, если все входящие в формулу физические характеристики являются измеряемыми (т.е. наблюдаемыми), то физический закон называется *экспериментальным законом*.

В формулировку физических законов входят, кроме измеряемых физических характеристик, также некие числа, которые принято называть *универсальными постоянными*. Конкретные числовые значения универсальных постоянных определяются на основе измерений в процессе направленного эксперимента.

Измерения физических характеристик представляют собой именованные числа. Эти числа имеют ту же природу, что и прематематические числа, о которых уже говорилось выше. Единственной особенностью, отличающей измерения от упомянутых прематематических чисел, является то, что они представляют собой числа, записанные с помощью конечного числа цифр в десятичной позиционной системе.

Установление физического закона по методологии Галилея распадалось на ряд этапов. *Первый этап* состоял в проведении эксперимента, целью которого являлось осуществление количественных наблюдений за небольшим числом *выбранных* физических свойств. Для проведения этого этапа необходимо, прежде всего, выделить некоторую гипотезу, для подтверждения или опровержения которой необходимо произвести количественные измерения. *Второй этап* начинается после получения набора измерений. Он заключается в поиске математической формулы, наиболее удовлетворяющей этому набору наблюдений. Здесь опять необходимо иметь гипотезу, но уже касающуюся математической формы зависимости, т.е. вида математической формулы. Наконец, *третий этап* состоит в проверке гипотез на соответствие измерениям. В этом случае проверяются обе гипотезы одновременно. Однако для выполнения этого этапа необходимо иметь критерий, на основе которого определяется соответствие гипотез имеющимся наблюдениям.

Третий этап в описанном выше процессе имеет и самостоятельное значение. Содержание этого этапа уже у Галилея использовалось для экспериментальной проверки его теоретических разработок. С этого момента такой подход стал одним из основных методов для проверки правильности физической теории.

Продолжая традицию Аристотеля, Галилей считал, что любая наука должна иметь дедуктивную структуру, т.е. она должна начинаться с аксиом, или первых принципов, и строиться дедуктивно. Способом получения аксиом он считал проведение экспериментов и анализ их результатов. Это означает, что все физические характеристики объектов, изучаемых в физике, являются наблюдаемыми.

В заключение этого пункта отметим, что экспериментальная физика не могла появиться нигде раньше и ни в каком другом месте, кроме Европы, и только в соответствующее время. Для ее возникновения необходимо, во-первых, соответствующий уровень развития математики, что позволило прийти к такому математическому объекту, как формула, а во-вторых, количественные расчеты проводились на числах, в удобном представлении для проведения вычислений. Только в XVII веке создались подходящие условия, о чем уже говорилось выше: были изобретены математические формулы, и стали использоваться десятичные дроби для вычислений.

Экспериментальная физика стала бурно развиваться в XVII веке. В это столетие было открыто и опубликовано несколько сотен различных экспериментальных законов.

7. Развитие экспериментальной физики поставило совершенно новые математические задачи, которые не встречались у греков. В качестве примера таких задач можно привести два типа задач, наиболее распространенных. *Первым типом* таких задач является поиск конкретных числовых значений параметров (физических постоянных) на основании набора измерений. Ко *второму типу* вычислительных задач относится поиск математической формулы, наиболее подходящей для выражения экспериментального закона, на основе набора измерений.

Указанные выше задачи не относятся, ни к греческой геометрии, ни к диофантовой арифметике и ни к пифагоровой теории чисел. Другими словами, новые задачи принадлежат новому типу математики, который мы назовем *прагматической математикой*. Основной целью прагматической математики является численное решение задач, т.е. задач, решением которых является конечный набор чисел. Естественней назвать новую математику вычислительной математикой, однако сегодня в этот термин вкладывается несколько другое содержание, и поэтому мы вынуждены ввести новый термин. В силу определения прагматической математики, прематематика становится ее частью.

Одним из основных объектов прагматической математики являются прагматические числа. Под *прагматическим числом* понимается слово, в запись которого входит конечное число цифр, которые могут быть разделены запятой (точкой), и кроме того, перед первой цифрой в слове может стоять знак « - ». На множестве всех прагматических чисел можно естественным образом определить арифметические операции сложения, вычитания и умножения. Операция деления определяется не для всех пар прагматических чисел. Для того, чтобы распространить операцию деления на любые пары прагматических чисел, вводится операция «деление с округлением», которая заменяет обычное арифметическое деление. Совокупность всех прагматических чисел с определенными на них арифметическими операциями называется *прагматической арифметикой*. По своей математической структуре прагматическая арифметика является *кольцом*.

Важно отметить, что прагматические числа могут быть как именованными, так и неименованными. Именованные числа часто выражают количественную сущность измерения, а неименованные числа являются объектами, не имеющими никакого количественного смысла. Поэтому именованные прематематические числа можно рассматривать как прагматические числа.

Очевидно, что пифагоровы числа не являются прагматическими числами. С другой стороны, неименованные прагматические числа в определенном смысле являются обобщением диофантовых чисел.

Теперь остановимся на процессе вычислений в рамках прагматической математики. В рамках прагматической математики мы сталкиваемся с задачами двух типов. В *первом случае* мы имеем дело с экспериментальным законом или следствием из него, имеющий вид вычислительной формулы. Тогда, подставляя конкретные прагматические числовые значения вместо букв в правой части и проводя арифметические вычисления в рамках прагматической математики, приходим к конкретному числовому значению буквы, стоящей в левой части формулы. Это значит, что любая задача из первого типа решается в рамках прагматической математики непосредственно.

Ко *второму типу* задач относятся все вычислительные задачи, отличающиеся от задач первого типа. В этом случае мы не можем непосредственно решать эти задачи. Для их решения мы должны воспользоваться другим типом математики – европейской теоретической математики. С помощью этой математики решение задач второго типа сводится на первом этапе к нахождению вычислительной формулы (формул), а на втором этапе – к вычислению конкретных значений этих вычислительных формул. Более подробно процесс решения этих задач мы рассмотрим в п. 10.

8. В первой половине XVII века великий французский ученый Р. Декарт опубликовал свою общую физическую теорию, которая затем в течение всего этого столетия заменяла собой аристотелеву механику. Эта теория принципиально отличалась от физики Аристотеля. По своей методологии теория Декарта напоминает Аристотеля, ибо она не использует в качестве языка математику и экспериментальную физику как базу для проверки соответствия теории действительности. Ее можно в этом смысле скорее отнести к натурфилософии, чем к современной физике.

Мы здесь не будем обсуждать содержание этой теории, ибо это выходит за рамки нашей работы. Для нас важно только отметить, что развитие европейской науки в рассматриваемом столетии далеко вышло за рамки греческой науки. Кроме указанного достижения Декарта отметим еще два его достижения, которые оказали влияние на все дальнейшее интеллектуальное развитие человечества.

Во-первых, Декарт является крупнейшим философом после Аристотеля, создателем нового направления в философии, которое послужило философской основой для построения теоретической науки – теоретического естествознания.

Во-вторых, он является создателем аналитической геометрии, появление которой изменила лицо математики. Создание аналитической геометрии объединила алгебру и геометрию, т.е. начался процесс алгебраизации геометрии. Кроме того, при создании аналитической геометрии Декарт усовершенствовал алгебраическую символику, которую ввел Виет, что впоследствии привело к созданию понятия математической функции, без которого сегодня немыслим язык математики. Необходимо отметить, что вводя координаты, Декарт ввел понятие единичного отрезка (масштаб), отсутствие которого так не хватало греческой геометрии, вынужденной построить так называемую геометрическую алгебру. Используя масштаб, стало возможным сопоставить как числам точку на вещественной оси, так и отрезкам – число.

Все указанные достижения, взятые вместе, создали технологическую базу для возникновения нового типа математики – *европейской теоретической математики*.

9. В последней трети XVII в. появился новый тип математики – *европейская теоретическая математика*. Слово «европейская» добавлено, чтобы подчеркнуть тот факт, что она была создана европейскими учеными на основе развития математики в Европе. Не вдаваясь в споры о приоритете, этот тип математики был практически одновременно создан Ньютоном и Лейбницем. Если для Лейбница то, что он создал, было математикой, то для Ньютона то, что он создал, было *теоретической физикой*, языком которой была математика.

Работы Ньютона совершили революционный переворот сразу в трех областях интеллектуального познания: в метафизике (т.е. в определенной области философии, связанной с познанием), в физике и в математике. В метафизике этот переворот заключался прежде всего в том, что изменились цели научной деятельности. Теперь стали считать, что основной целью науки является не нахождение объяснения физическим явлениям, а поиск описания этих явлений с помощью математического языка. Другими словами, произошла замена словесной модели, которая служила *объяснением* физического явления, на математическую модель, которая служит *описанием* этого явления. Подобное изменение целей науки вынудило изменить и все строение метафизики и оказало большое влияние на всю философию в целом. В частности, эта революция нашла свое яркое выражение в философии И. Канта.

В физике революция Ньютона заключалась прежде всего в том, что он построил первую логически стройную аксиоматическую математическую модель Вселенной. Построение подобной модели явилось, по существу, осуществлением мечты древних греков о построении физики в виде аксиоматической теории. Эта модель явилась в дальнейшем базой для построения теоретической механики, с чего и началась теоретическая физика.

Другой аспект этой революции заключается в том, что впервые математические символы (понятия) стали толковаться как интеллектуальные ненаблюдаемые объекты, несущие определенное интеллектуальное нематематическое содержание. С этого момента математические термины и понятия стали иметь и так называемое «прикладное» содержание: ненаблюдаемые интеллектуальные объекты, обозначаемые математическими понятиями, стали рассматриваться как ненаблюдаемые элементы окружающего мира. Как мы уже отмечали выше, и греки в прошлом при построении интеллектуальной картины мира использовали ненаблюдаемые интеллектуальные понятия (объекты). Однако начиная с Ньютона, только математические объекты, являющиеся элементами математических теорий, стали служить ненаблюдаемыми интеллектуальными объектами, используемыми для описания природных процессов и явлений.

Процесс введения в рассмотрение математических понятий, связанных с физикой, в это время существенно отличался от аналогичного процесса во времена древних греков. Все математические понятия, введенные греками используемых в физике, относились к геометрии, т.е. имели достаточно широкую реальную основу, являясь результатом процесса абстрагирования объектов, которые встречаются в реальной жизни. Именно поэтому эти понятия легко усваивались и применялись. Индусы и арабы ввели в рассмотрение отрицательные и иррациональные числа, но их усвоение растянулось на многие годы и даже столетия, хотя они имели определенный «реальный» смысл, реальное основание. Отрицательные числа возникли при решении практических хозяйственных задач, а иррациональные числа пришли из геометрии. Появление комплексных чисел, а также алгебры, использующей буквенные коэффициенты, понятия производной и интеграла, совершенно изменило картину в математике, ибо эти понятия качественно представляли собой абстракции более высокого порядка, чем, например, натуральные числа или треугольник. Введение математических понятий высокой степени абстракции, которые были продуктом человеческого интеллекта, а не обобщением объектов, встречающихся в природе, в дальнейшем привело к значительным сложным проблемам, связанным с построением логического обоснования математического анализа.

Математический аппарат, примененный Ньютоном для построения физической теории, поставил несколько принципиальных проблем перед метафизикой, а тем самым и перед философией. В основе математической модели механики, предложенной Ньютоном, как мы уже отмечали, лежит понятие непрерывной функции. Сущность непрерывной функции, в частности, заключается в том, что она допускает бесконечное деление аргумента функции.

Использование непрерывной функции как символа функционирования физического объекта означает совпадение физической и математической непрерывности, что часто противоречит основным философским предположениям, лежащим в основе метафизики, которые отражают дискретность в определенном смысле физических явлений. Среди этих предположений, противоречащим непрерывности, находится и атомная гипотеза, что, в конечном счете, впоследствии привело к проблемам включения квантовой механики в общую физику, построенную в первой половине XX века. Кроме того, физическая непрерывность принципиально отличается от математической непрерывности (см. 8, с. 24). Таким образом, Ньютон, используя непрерывную математическую модель как основу своей теории, этим самым заложил внутреннее противоречие между ее физическим и математическим содержанием, которое ярко проявилось в XX веке.

Таким образом, использование математического анализа для моделирования физических объектов или явлений требовало принципиального изменения метафизики. Все попытки Ньютона совместить непрерывность функции с дискретностью аргумента закончились провалом, ибо в этом случае невозможно было получить необходимые для физического исследования результаты, поскольку тогдашняя математика (включая и математический анализ) оказалась бессильной сформулировать мало-мальски нетривиальную аксиоматическую математическую теорию. Еще раз подчеркнем, что

Ньютон создал аксиоматическую *физическую* теорию, но не аксиоматическую *математическую* теорию.

На развитие математики существенное влияние оказал один из крупнейших ученых XVII века Г. Лейбниц. Он разработал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления, исходя из геометрии кривых. Именно в этой области впервые появился термин «функция», под чем он понимал любую линию, которая в общепринятом смысле слова «выполняет свою функцию» в фигуре: играет роль касательной, нормали и т.д., и таким образом «функционирует». Отметим несколько основных моментов, характеризующих вклад Лейбница в развитие математики.

Во-первых, как уже сказано выше, одновременно с Ньютоном и независимо от него он является основателем математического анализа. Познакомившись с трудами Ферма, Паскаля, Декарта, Валлиса и других математиков, он в 1675 г. создал свою версию дифференциального исчисления, а через год – и интегрального исчисления.

Во-вторых, Лейбниц был тем, кто после Аристотеля внес наибольший вклад в логику. В логике он развил учение об анализе и синтезе, впервые сформулировал закон достаточного основания, ему принадлежит также принятая в современной логике формулировка закона тождества. В его работе «Об искусстве комбинаторики» (1666 г.) предвосхищены некоторые моменты современной математической логики. В частности, он выдвинул идею применения в логике математической символики и построений логических исчислений, т.е. поставил задачу логического обоснования математики. Математика, по Лейбницу, есть особый случай применения логики. Если с точки зрения Декарта математика представляет собой самый строгий и чистый тип знания, который должен служить образцом для всей науки, то Лейбниц, напротив, убежден в том, что «начала», аксиомы математики не первичны, а имеют свои основания в исходных логических аксиомах.

В-третьих, Лейбницу принадлежит значительное число основных терминов математического анализа (дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, функция, постоянная, переменная, координаты, абсцисса, алгебраические и трансцендентные кривые, алгоритм, модель и др.) и широко распространенных обозначений, которые используются до сих пор (символы для дифференциала и интеграла, знак равенства «=» и знак «.» для умножения и др.)

Новый тип математики, который мы назвали европейской теоретической математикой, принципиально отличается от других типов математики, которые мы обсуждали выше. Ее отличия от греческой математики очевидны. Теоретическая математика отличается от прагматической прежде всего целями исследования. *Теоретическая математика* ***доказывает*** *утверждения, в то время как прагматическая математика* ***вычисляет***. Другими словами, теоретическая математика не решает вычислительных задач. Кроме того, эти два типа математики отличаются объектами исследования: теоретическая математика оперирует *математическими числами*, а прагматическая – прагматическими числами.

10. Одним из основных понятий математического анализа является понятие *математического числа,* представляющее собой абстракцию высокого порядка. Отметим характерные особенности математических чисел.

Во-первых, математические числа являются неименованными числами. Это означает, что в эти числа не вкладывается никакое конкретное содержание. В частности, они не отражают никакой количественной сущности. Другими словами, математические числа являются абстрактными объектами, на множестве которых определены четыре операции, которые обычно называют *арифметическими операциями*. Из сказанного следует, что математические числа принципиально отличаются от прематематических.

Во-вторых, только часть математических чисел можно однозначно записать с помощью конечного числа десятичных цифр. Другими словами, существуют математические числа, которые нельзя однозначно представить в виде слова, состоящего из конечного числа цифр. Из сказанного следует, что математические числа отличаются от прагматических чисел.

В-третьих, множество всех математических чисел является непрерывным множеством (в смысле обычной метрики), в то время как множества, рассматриваемых до сих пор чисел, являются дискретными.

В-четвертых, множество всех математических чисел вместе с определенными на этом множестве арифметическими операциями является математической структурой, называемой *полем*. Напомним, что множество всех прагматических чисел вместе с арифметическими операциями, определенными на нем, образует структуру, которую называют *кольцом*.

В-пятых, математические числа не несут в себе никакой количественной сущности. Они являются просто некими объектами, которыми манипулируют по определенным правилам.

Множество всех математических чисел вместе с арифметическими операциями, определенными на нем и удовлетворяющими определенным аксиомам, будем называть *математической арифметикой*.

Каждому прагматическому числу можно взаимно-однозначно сопоставить математическое число, имеющее одно и то же с прагматическим числом цифровое представление. Такое соответствие назовем *каноническим соответствием*.

Из перечисленных различий между математическими и прагматическими числами следует следующий принципиальный вывод:

Утверждение, верное на множестве математических чисел, может не являться верным на множестве прагматических чисел.

В качестве простого примера, иллюстрирующего последнее утверждение, можно привести алгебраическое уравнение: $x^2 - 2 = 0$. Это уравнение имеет решение на множестве математических чисел и не имеет решения на множестве прагматических чисел. Учитывая этот пример, можно утверждать:

Уравнение, разрешимое на множестве математических чисел, может быть неразрешимым на множестве прагматических чисел.

Математический анализ также сформулировал ряд типов вычислительных задач, которые относятся к прагматической математике. Все эти задачи в общем случае относятся ко второму типу вычислительных задач, которые невозможно непосредственно решить в рамках прагматической математики. В процессе решения этих задач мы вынуждены обращаться к теоретической математике.

Процесс решения этих задач распадается на два этапа. На первом этапе мы рассматриваем поставленную задачу как задачу из теоретической математики. С помощью последовательности математических преобразований сводим первоначальную задачу к вычислительной формуле, т.е. к задаче первого типа. Эту последовательность математических преобразований, которая сводит первоначальную задачу к вычислительной формуле, будем называть *вычислительным алгоритмом*. Первый этап заканчивается доказательством, что решение, полученное с помощью вычислительной формулы, является решением поставленной задачи. Второй этап заключается в непосредственном вычислении вычислительной формулы или набора вычислительных формул.

Приведем простейший пример задачи второго типа. Пусть необходимо решить уравнение: $2x-4=0$. Это уравнение нельзя непосредственно решить, ибо все преобразования этого уравнения, как это мы учили в школе, выполняются на основе аксиом. Для решения этого уравнения делаются следующие *математические* преобразования:

$$
\begin{aligned}
&(2x-4)+4=0+4\\
&2x+(-4+4)=4\\
&2x=4\\
&(2x)*\frac{1}{2}=4*\frac{1}{2}\\
&x=4*\frac{1}{2}=2
\end{aligned}
$$

Вычислительная задача, для которой не существует вычислительного алгоритма, называется *невычислимой задачей*.

Из описанного процесса решения вычислительных задач следует ряд важных методологических следствий. *Во-первых*, теоретическая математика тесно связана с прагматической, ибо только теоретическая математика может предложить вычислительный алгоритм. *Во-вторых*, ***вычислительная формула носит двойственный характер***. С одной стороны, она является математическим объектом, а с другой – прагматическим объектом. Поэтому необходимо отмечать специально, с какой точки зрения мы рассматриваем вычислительную формулу. *В-третьих*, математическое число, канонически соответствующее результату вычисления прагматической вычислительной формулы, может не являться решением поставленной математической задачи.

11. До первой половины XIX века теоретическая физика и теоретическая математика развивались одновременно в тесной связи друг с другом. Однако уже в первой половине XIX века начался процесс отделения европейской теоретической физики от европейской теоретической математики. Одна из причин этого процесса лежит в том, что в математике обнаружились противоречия, для устранения которых необходимо было заняться обоснованием, что являлось чисто внутренним делом математики. Это привело к разделению теоретической математики на два направления: на *чистую* и *прикладную* математику. *Чистая математика* занимается задачами, относящимися только к математике. Под *прикладной математикой* понимается математика, которая занимается задачами, связанными с различными приложениями математики к другим областям знаний. В частности, математика, с которой работают физики-теоретики, является прикладной. Другая причина отделения математики от физики связана с разными проблемами, с которыми сталкиваются физики и математики в исследовании математических теорий в физике.

В симбиозе физика-математика математика играла вспомогательную роль, исполняя роль языка для описания физических явлений, в то время как физика должна дать описание физического явления, которое наблюдается в окружающем мире. От физической теории разумный исследователь требует, *во-первых*, чтобы эта теория была математически непротиворечивой, а *во-вторых*, чтобы любое следствие (утверждение), которое вытекает из этой теории, при экспериментальной проверке или при проверке разумным мысленным экспериментом соответствовало действительности. В начале XIX века, когда физики-теоретики были одновременно и математиками, первое требование явно не высказывалось, ибо интуитивно подразумевалось, что физическая непротиворечивость, которая проявляется на опыте, гарантирует и математическую непротиворечивость. Более того, так как созданные теории описывают законы Природы, установленные Богом, то вопрос о математической непротиворечивости таких теорий не ставился.

Однако к концу XVIII в. физики-теоретики, как математики, стали интуитивно ощущать и даже видеть, что в математическом анализе: языке теоретической физики, существуют внутренние математические противоречия, решить которые можно только математическим путем без всякой связи с физической действительностью. Другими словами, в начале XIX в. произошло отделение физической непротиворечивости теории от математической непротиворечивости. Это, в частности, означало отделение теоретической физики от теоретической математики.

К началу XIX в. была построена теоретическая механика в виде некоторой аксиоматической математической теории на базе механистической концепции, которая основывалась на двух предположениях. *Во-первых*, все физические явления являются результатами сил притяжения и отталкивания, которые действуют как на отдельные физические тела различной природы, так и на совокупности тел (механистическая концепция). *Во-вторых*, существует *вера*, что взаимодействие этих сил описывается математическим путем.

Затем с разных сторон стали поступать сигналы о проблемах, с которыми столкнулись физики в их попытках объяснить многочисленные известные и вновь открытые физические явления с помощью механистической методологии. Эти проблемы можно объединить в несколько типов. *Первый тип* проблем связан с тем, что первоначально построенная теория имеет ограниченные рамки, что выражается в том, что имеющихся в этой теории аксиом недостаточно, чтобы можно было описать эти проблемы с помощью этой теории. Стандартный путь решения проблем этого типа состоит в дополнении теории новой аксиомой или новыми аксиомами. Разнообразие явлений требует разнообразие дополняемых аксиом.

Но тогда мы сталкиваемся с проблемой большого количества аксиом в теории, что затрудняет ее проверку на математическую непротиворечивость. Поэтому для построения удобной в использовании теории количество аксиом необходимо ограничить. При решении этой проблемы физики проявили настоящую изобретательность. Для построения теории они добавили к первоначальной теории целое множество различных аксиом. Это дополнительное множество аксиом называют *постулатом*. При изучении конкретного физического явления физики используют первоначальную теорию с добавленной только *одной* аксиомой. Таким образом, выбор добавляемой аксиомы из множества аксиом в каждом случае зависит от конкретной ситуации. С одной стороны, в общем случае к теории добавляется множество аксиом (причем число аксиом в множестве не известно), а с другой стороны, при использовании теории пользуются небольшим количеством аксиом, что существенно облегчает проверку и доказательство непротиворечивости теории.

В качестве примера можно привести *принцип сохранения энергии* и следующее высказывание А. Пуанкаре, касающиеся этого принципа:

«… мы видим, что этот абсолютный принцип нелегко даже сформулировать. В каждом конкретном случае мы ясно видим, что такое энергия, и можем определить ее – по крайней мере, предварительно; но найти общее определение невозможно. Как только мы хотим выразить принцип во всей его общности и приложить его к Вселенной, мы видим, что он так сказать испаряется и от него остается только следующее: существует нечто, что остается постоянным» (8, сс. 86-87).

Этот и некоторые подобные принципы о постоянстве какой-либо величины (например, принцип Гамильтона о минимизации действия или утверждение Эйнштейна о постоянстве скорости света) являются необходимым элементом любой физической теории. Прежде всего, это связано с тем, что без хотя бы одного такого принципа невозможно построить мало-мальски содержательную математическую теорию. Другими словами, эти принципы выполняют *техническую* (математическую) роль. С другой стороны, физики приписывают некий содержательный смысл и толкуют как законы Природы. Более того, часто они утверждают, что физическая теория, которая построена на соответствующем математическом аппарате, является *открытием законов* Природы, а не человеческим *изобретением*.

Второй тип проблем связан с тем, что в теоретической механике рассматриваются системы, состоящие из небольшого числа так называемых материальных точек, обычно каким-то способом связанных друг с другом. В этом случае при определенных ограничениях можно построить математическую модель, описывающую поведение каждой точки в системе и их взаимодействие при определенных ограничениях. Эти ограничения необходимы потому, что в механике Ньютона есть единственный закон, записывающий взаимодействие *только двух* тел. Найти приемлемую математическую модель, описывающую взаимодействие трех тел (а тем более, большего количества тел) , до сих пор не удалось. Если в физической теории рассматривается взаимодействия большого числа тел, движение и взаимодействие которых не удовлетворяет определенным ограничениям, то в этом случае не представляется возможным построить удовлетворительную математическую модель.

Проблемы второго типа, в частности, возникли при попытках включить кинетическую теорию газов в механистическую теорию физики. В ранней кинетической теории газов содержались такие законы, как закон Бойля-Мариотта, закон Гей-Люссака и др., в которых не использовалась понятие «сила». Кроме того, эта теория не имела аксиоматического строения. Эту теорию удалось включить в общую физику, благодаря новому подходу. Он был предложен Больцманом и Гиббсом и основан на использовании понятия статистической закономерности. Физическая теория, разработанная в этом направлении, получила название *статистической механики*.

В этой теории, основные аксиомы которой представляют собой простые следствия ньютоновой механики, исследовались те выводы, которые можно сделать из неполного знания сложной системы. В принципе, здесь никто не отказывается от детерминированного подхода. Считалось, что каждое единичное событие полностью определено законами ньютоновой механики. Но, кроме того, принимали во внимание, что *механические свойства системы известны не полностью*. Было введены *физические* понятия, которые могли быть отнесены к некоторому предмету лишь в том случае, когда имеющиеся знания об этом предмете неполно. Если бы, например, были известны движение и положение всех молекул газа, тогда бы не было смысла говорить о температуре газа. Понятие температуры могло быть использовано только при условии, при котором имеющиеся знания о системе неполны, и из этого неполного знания можно сделать только статистические выводы. Для построения статистической механики необходим новый математический аппарат, с помощью которого изучаются недетерминистские математические модели.

Третий тип проблем связан с попытками включить электричество, магнетизм и оптику в механистическую картину физики. Это удалось сделать, добавляя к механике Ньютона и двум принципам (принцип сохранения энергии и принцип Гамильтона) уравнение Максвелла, являющегося волновым уравнением. Таким образом, удалось построить в конце XIX в. общую физику, которая объединяла все известные к тому времени разделы физики в одну науку. Однако на этом пути пришлось отказаться от всеобщности механистической трактовки физических явлений.

Сделаем одно замечание, касающееся типа математического аппарата, используемого в общей физике. Если в механике Ньютона основной математический аппарат включает в себя обыкновенные дифференциальные уравнения, то уравнения Максвелла являются уравнениями в частных производных. Другими словами, в волновой теории используется более сложный математический аппарат.

В конце XIX в. и в начале XX в. из ряда выдающихся событий в физике выделим два, которые являются важнейшими для развития физики в дальнейшем. *Во-первых*, в начале XX в. Эйнштейном была создана специальная теория относительности, которая в определенной части заменила механику Ньютона. Это замена касалась основных понятий, связанных с пространством, временем и движением. Математическим аппаратом в этом случае послужило теория поля, а также теория групп симметрий. Хотя эта теория сыграла большую роль в физике, с методологических позиций она лежала в русле методологии Ньютона, чья теория как бы являлась «предельным» случаем теории Эйнштейна.

Во-вторых, в конце XIX века был открыт электрон. Это открытие показало, что атом не является неделимой частицей. Собственно, с этого открытия и начинается ядерная физика, которая оказала огромное влияние на все стороны человеческой жизни в XX веке. Развитие ядерной физики привело к созданию квантовой механики в середине 20-х годов XX века, методология которой принципиально отличается от методологий физики, существовавших до этого времени.

В середине 20-х годов XX в. возникла квантовая механика. История ее возникновения широко известна из многочисленных книг физиков, которые были причастны к ее созданию, поэтому мы не будем останавливаться на ее истории. Математическое строение квантовой механики так представил В. Гейзенберг в своей книге «Физика и философия»:

«Точная математическая формулировка квантовой теории сложилась в конечном счете в процессе развития двух различных направлений. Одно направление было связано с принципом соответствия Бора. … Летом 1925 года она привела к математическому формализму, который был назван «матричной механикой», или вообще говоря, квантовой механикой. Уравнения движения механики Ньютона были заменены подобными уравнениями для линейных алгебраических форм, которые в алгебре называются матрицами. …

Другое направление исходило из идей де Бройля о волнах материи. Шредингер попытался записать волновое уравнение для стационарных волн де Бройля, окружающих атомное ядро. В начале 1926 года ему удалось вывести значения энергии для стационарных состояний атома водорода в качестве собственных значений своего волнового уравнения, и он сумел дать общее правило преобразования данных классических уравнений в соответствующие волновые уравнения, которые, правда, относятся к некоторому абстрактному математическому пространству, именно к многомерному конфигурационному пространству. Позднее он показал, что его волновая механика математически эквивалентна более раннему формализму квантовой или матричной механики. Таким образом, мы получили наконец непротиворечивый математический формализм, который можно выразить двумя равноправными способами: или с помощью матричных соотношений, или с помощью волновых уравнений» (9, сс. 14-15).

Однако один способ был основан на корпускулярной картины, а другой – на волновой. Бор описывал атом как систему, состоящую из ядра и электронов, а Шредингер – из атомного ядра и материальных волн. Эти два представления Бор предложил рассматривать одновременно и параллельно с помощью так называемого *принципа дополнительности*. «Бор рассматривал обе картины – корпускулярную и волновую – как два дополнительных описания одной и той же реальности. Каждое из этих описаний может быть верным только отчасти. Нужно оказать границы применения корпускулярной картины, так же как и применения волновой картины, ибо иначе нельзя избежать противоречий. Но если принять во внимание границы, обусловленные соотношением неопределенностей, то противоречия исчезают» (9. с. 17).

Методология квантовой математики полностью выходит за рамки классической физики, и все попытки тем или иным способом «загнать» ее в эти рамки окончились неудачей.

Таким образом, в XX веке теоретическая физика представляет собой набор разных теорий, более-менее удачно описывающих отдельные области физических явлений, причем эти теории не объединены никакой общей методологией. Однако при построении физических теорий физики обычно стремятся построить теорию, обладающую тремя свойствами. Во-первых, теория должна иметь аксиоматическое строение с конечным числом аксиом, во-вторых, теория должна дать возможность проверить ее на экспериментах, а в-третьих, дать объяснения ряду экспериментов, которые не имели его ранее.

12. Введем в рассмотрение несколько общих определений, которые позволяют классифицировать различные теории и которые будут полезны ниже. Физическую теорию будем называть *правильной*, если она является непротиворечивой с точки зрения математики. Правильная теория называется *проверяемой*, если существует хотя бы одно следствие из этой теории, утверждение которого можно экспериментально проверить. Следствие, с помощью которого проверяется теория, называется *проверяемым следствием*. Следствие из теории называется *соответствующим действительности*, если, во-первых, утверждение этого следствия можно проверить на эксперименте, в, во-вторых, результаты эксперимента подтверждают это утверждение.

Правильная теория называется *соответствующей действительности*, если любое его проверяемое следствие является соответствующим действительности. Если только часть проверяемых следствий из теории соответствуют действительности, то такая теория называется *частично соответствующей действительности*.

Проверяемое следствие из теории называется *непосредственно проверяемым*, если оно представляет собой вычислительную формулу. В противном случае, проверяемое следствие будем называть *непрямо проверяемым*.

Следствие из теории называется *условным*, если оно вытекает из теории при некоторых ограничениях. Если же следствие из теории является справедливым без всяких дополнительных ограничений, то оно называется *прямым следствием*. Прямые следствия играют существенную роль в тех случаях, когда они позволяют упростить математическую модель. Например, в тех случаях, когда можно избавиться от использования в модели дифференциальных уравнений любого типа. Теория, которая не обладает прямыми следствиями, упрощающими ее математически, называется *неупрощаемой теорией*.

Уточним содержание понятия «проверяемое следствие». Обычно в это понятие вкладывается следующее содержание: результаты численных расчетов при определенных значениях физических параметров, проведенных на основании следствия, соответствуют результатам соответствующих экспериментов. Для того, чтобы провести расчеты на основании следствия, следствие должно быть представлено в виде вычислительной формулы. Это значит, что ***следствие из теории является проверяемым, если оно сводится к вычислительной формуле***.

В общем случае результаты вычислений по вычислительной формуле отличаются от результатов эксперимента. Поэтому для определения того, в какой мере результаты эксперимента соответствуют расчетным данным, *должен быть задан* некий критерий, который назовем *критерием соответствия*. Критерий соответствия служит тем инструментом, с помощью которого определяется факт соответствия или несоответствия проверяемого утверждения действительности.

Выбор критерия соответствия осуществляется исследователем и часто носит субъективный характер. Это означает, что в процессе решения вычислительной задачи важную роль играет *субъективный фактор*. Несмотря на то, что выбор критерия носит субъективный характер, должно существовать общественное согласие относительно этого критерия. Другими словами, выбранный критерий должен быть признан соответствующей научной общественностью, т.е. он должен стать *общественным соглашением*.

13. В первой половине XX в. человечество пережило мировой экономический кризис и Вторую мировую войну. Эти события выявили необходимость в решении принципиально новых задач, с которыми человечество не встречалось ранее. Возникшие задачи относились к различным аспектам управления больших и сложных систем, таких как национальные экономики, межнациональные и крупные национальные корпорации, организация разработки и производства новых видов вооружения и т.п. В частности, эти задачи относились к экономическому и социальному управлению системами, как на национальном уровне, так и на международном уровне.

Вся предыдущая научная деятельность не могла помочь в решении стоящих задач. Коротко основную причину можно выразить следующим образом: предыдущая наука занималась изучением естественных явлений, а новые задачи относились к управлению сложными объектами. Да и сам процесс решения новых задач отличался от процесса решения естественнонаучных задач. Отметим некоторые из этих принципиальных отличий. *Во-первых*, если целью ученых, занимающихся естествознанием, было построение теории, описывающей то или иное природное явление, то проблемы, связанные с управлением, обычно заключаются в обосновании выбора того или иного управленческого решения. *Во-вторых*, если ученый сам формулировал себе задачу для исследования, причем не указывал временные рамки для ее решения, то при решении задач, связанных с управлением, формулировку задачи и временные рамки для ее решения ученый уже не устанавливает. *В-третьих*, если до начала XX века естественнонаучные проблемы решались, по существу, отдельными учеными, то проблемы управления, в зависимости от уровня управления, являются комплексными, в процессе решения которых уже участвуют коллективы ученых и специалистов.

Стремление обеспечить новые научные потребности и привело к новой интеллектуальной революции, которая началась во второй трети XX века и, по всей вероятности, продолжается и сейчас. Эта революция, которую можно назвать *мировой* в отличие от других, ибо в ней участвовали ученые со всего мира, в корне изменила общее направление научных исследований и не только его. Начиная со второй трети XX века, центр тяжести в научных исследованиях был перенесен с естественнонаучных проблем на решение проблем экономического, корпоративного и социального управления.

Изменение направленности научных исследований и появление принципиально новых постановок научных задач потребовали принципиального изменения существующей методологии. Необходимость новой научной методологии была вызвана тем, что прежние методы решения естественнонаучных проблем не давали никаких инструментов для решения вновь возникших задач, в частности, в области прогнозирования функционирования сложных объектов.

Создание новой научной методологии и разработка на ее базе новой науки, состоящей из различных конкретных дисциплин, является одним из результатов интеллектуальной революции. Новый тип науки можно назвать *мировой наукой*, прежде всего потому, что в ее создании участвовали и участвуют ученые многих стран, активно сотрудничающие друг с другом. Значительный вклад в создание этой науки внесли ученые США, где раньше всего возникли проблемы, для решения которых она стала необходима.

Методологической основой мировой науки является системный подход. Его можно рассматривать как принцип познания. Этот подход состоит в том, что любой более или менее сложный объект рассматривается в качестве относительно самостоятельной системы со своими особенностями функционирования и развития. В литературе нередко употребляются несколько терминов: системный подход, принцип системности, системный метод. Чаще всего они употребляются как синонимы.

При системном подходе основными понятиями являются понятия «система» и «модель». Под *системой* понимается совокупность взаимосвязанных элементов. Приведенное определение не является строго формальным и однозначным, но уже на таком уровне позволяет разработать содержательные теории. Одной из основных особенностей данного определения системы является подчеркивание того, что система является нечто *целым*, состоящим из частей. Системы, ряд свойств которых не индуцируются составляющими их частями, называется *сложными системами*. Те системы, свойства которых индуцируются свойствами своих частей, принято называть *простыми системами*. Европейская наука в рамках естествознания изучала естественные явления или реальные объекты как простые системы. Этому свидетельствуют многочисленные высказывания ученых, начиная с Аристотеля и до Фейнмана и других. Мировая наука основное свое внимание уделяет изучению сложных систем.

Основной способ изучения реальных объектов в теории сложных систем основывается на исследовании модели или совокупности взаимосвязанных моделей. Под *моделью* понимается описание системы на некотором общественном языке. Познание любого объекта или явления *всегда* происходит с помощью модели. Если объект находится вне сознания человека, то для его изучения человек должен прежде всего построить модель этого объекта на одном из языков. Язык моделирования может быть языком ощущений или, например, любым языком человеческого общения. ***Знания относительно исследуемого объекта всегда являются знаниями, связанными с некоторой моделью. Вне модели нет знаний об исследуемом объекте***. Но для того, чтобы знания, полученные с помощью модели, можно было принять за знания относительно исследуемого объекта, необходимо, чтобы были основания для такого решения. Обычно в этом случае говорят, что модель должна *соответствовать* изучаемому объекту. Понятие «модель соответствует исследуемому объекту» является, по своей сути, *соглашением* между людьми, принадлежащими определенному сообществу.

Модель, которая полностью соответствует изучаемому объекту, называется *адекватной моделью*. Дать достаточно строгое определению «адекватная модель объекта» вряд ли возможно. Каждому исследователю обычно интуитивно понятно (правда, каждому по-своему), что именно он вкладывает в это понятие. В расплывчатом виде его содержание можно выразить так: модель является адекватной моделью исследуемому объекту, если поведение модели аналогично поведению объекта. Эта формулировка вряд ли устроит критика, но она, во всяком случае, дает некое представление о сути содержания. Эта суть заключается в том, что ***для целей исследования адекватная модель полностью заменяет сам исследуемый объект***. Другими словами, если в процессе моделирования используется адекватная модель, то результаты исследования этой модели можно автоматически рассматривать как результаты исследования самого объекта.

Вопрос о существовании или несуществовании адекватной модели для исследуемого реального объекта или явления является принципиальным вопросом в естествознании, а особенно, в физике. С самого своего зарождения греческая наука, по существу, основывалась на существовании адекватных моделей, ибо именно это служило психологическим обоснованием самого создания научного мировоззрения. Со рождения европейская физика (Галилей, Кеплер, Декарт, Ньютон и др.) сначала явно, а затем в более скрытой форме предполагала существование для реальных явлений адекватных моделей. Это означало, что все ученые того времени предполагали (возможно, не всегда точно формулируя), что вся природа подчиняется определенным законам. Эти законы, по их мнению, установлены Богом.

Утверждение о существовании адекватных моделей для естественных явлений, имевшее место в европейской теоретической науке, вытекало из того факта, что при своем появлении европейская теоретическая физика совпадала с европейской теоретической математикой. Так как любую математическую теорию можно рассматривать как математическую модель этой теории, то очевидно, что эта модель является адекватной моделью. Поэтому ее рассматривали и как адекватную модель физического явления.

Признание существования законов природы – это, по существу, признание существования адекватной модели. (Правда, все зависит от того, какое содержание вкладывается в понятие «закон».) И сегодня, согласно заявлениям ученых, особенно физиков, целью значительного большинства физических исследований является установление физических законов, которые управляют природой. Иначе говоря, немалая часть исследователей-физиков предполагает, что для каждого реального объекта теоретически существует некая математическая модель, адекватная реальному изучаемому объекту.

Здесь удобно привести следующее высказывание А. Эйнштейна, которое иллюстрирует вышесказанное:

«Какое место занимает картина мира физиков-теоретиков среди всех возможных таких картин? Благодаря использованию языка математики эта картина удовлетворяет наиболее высоким требованиям в отношении строгости и точности выражения взаимозависимостей. Но зато физик вынужден сильнее ограничивать свой предмет, довольствуясь изображением наиболее простых, доступных нашему опыту явлений, тогда как все сложные явления не могут быть воссозданы человеческим умом с той точностью и последовательностью, которые необходимы физику-теоретику. Высшая аккуратность, ясность и уверенность – за счет полноты. Но какую прелесть может иметь охват такого небольшого среза природы, если наиболее тонкое и сложное малодушно и боязливо оставляется в стороне? Заслуживает ли результат такого скромного занятия гордое название «картины мира»?

Я думаю — да, ибо общие положения, лежащие в основе мысленных построений теоретической физики, претендуют быть действительными для всех происходящих в природе событий. Путем чисто логической дедукции из них можно было бы вывести картину, т.е. теорию всех явлений природы, включая жизнь, если этот процесс дедукции не выходил бы далеко за пределы творческой возможности человеческого мышления...

Отсюда вытекает, что высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов, из которых путем чистой дедукции можно получить картину мира».

Иногда эти адекватные модели строились в виде отдельных утверждений, которых называли законами природы, а иногда — и из набора утверждений, что считалось физической теорией. Но в любом случае каждый раз физики предполагали, и сегодня в своем большинстве предполагают явно или неявно существование адекватных (математических) моделей для природных явлений.

Но что позволено физикам, то должно быть позволено и другим ученым: экономистам, биологам и т.д., которые пытались и пытаются найти математическое выражение экономических, биологических и прочих законов.

Получить ответ на вопрос о существовании адекватной модели с помощью научного исследования не представляется возможным. Признание существования адекватной системы является, по существу, вопросом мировоззрения или веры. Другими словами, ученый либо верит в существование адекватной модели, либо отрицает её существование (хотя последнее у физиков встречается относительно редко). Здесь уместно еще раз обратиться к А. Эйнштейну, который писал:

«... в основе моей концепции лежит тезис, решительно отвергаемый большинством теоретиков.

Существует некоторое независимое от любых наблюдений или измерений “**реальное состояние**” физической системы, которое в принципе может быть описано принятыми в физике способами выражения. (Какие при этом применимы адекватные способы выражения и соответствующие понятия, на мой взгляд, пока не известно...) Этот тезис о реальности не имеет смысла внутренне ясного утверждения; он обладает, собственно, лишь **программным** характером».

Один из крупных математиков XX века А. Гротендик в своей книге «Урожаи и посевы» писал:

«Начиная с успеха ньютоновской теории, среди физиков стало аксиомой по умолчанию, что существует математическая модель (даже единственная правильная модель) для абсолютно адекватного, без сучка и задоринки, выражения физической реальности. Это соглашение, более двух столетий задававшее у нас тон, представляет собой нечто вроде окаменелых останков некогда живого видения Пифагора: «Все есть число». … Стоит лишь на мгновение над этим поразмыслить, как становится ясно, что законность такого соглашения далеко не бесспорна. Есть даже весьма серьезные философские причины тому, чтобы априори ставить под сомнение или, по крайней мере, предусматривать строжайшие границы применимости этого соглашения. Поняв это, остается – теперь или никогда – подвергнуть эту аксиому тщательной критике, даже, может быть, «доказать». Вне всякого сомнения, что она не имеет под собой основания: не существует неопровержимой математической модели, которая объясняла бы совокупность так называемых физических явлений, составляющих их сегодняшний список» (11, с.).

Аналогичное утверждение можно встретить и у М. Клайна в его книге «Математика. Утрата неопределенности»:

«История физики усеяна обломками отвергнутых теорий. Воскресающие время от времени надежды на то, что всю сложность природы удастся “вогнать” в некую конечную систему законов, по-видимому, мало оправданы. Было бы безрассудно полагать, будто эти уроки прошлого не повторятся в будущем и что существующие ныне теории выдержат несокрушимый напор времени и опыта. Столь тщательно возведенные нами системы – всего лишь более или менее полезные модели того, что мы временно принимаем за истину. Ни одна из математических теорий не может претендовать на абсолютное постижение реальности в самой ее сути. Утверждение, что физика объективна, тогда как политика и поэзия необъективны, лишено основания. И физика, и поэзия, и политика стремятся к постижению истины, и в этом отношении физик не имеет ни малейших преимуществ перед политиком или поэтом. Однако ничто не может соперничать с физикой в точности и в предсказании. В окружающем нас мире существует нечто такое, что математическая теория способна “схватить и описать”» (12, с. 230-231).

Различие между ученым, который верит, что существует адекватная модель, и ученым, который отрицает существование адекватной модели, аналогично различию между религиозным человеком и атеистом. Результаты научной деятельности религиозного ученого (физика, химика, экономиста и т.п.), по существу, не отличаются от результатов деятельности ученого-атеиста. Однако отличия возникают как в способе достижения результата, так и в истолковании результатов исследования.

Отрицание существования адекватной модели для исследуемого объекта по существу означает, что для решения множества разнообразных проблем, касающихся исследуемого объекта, нельзя обойтись исследованием только одной модели (адекватной модели). Другими словами, в этом случае для решения каждой конкретной проблемы необходимо строить модель, с помощью которой мы можем решить эту проблему. Такую модель, призванную решить конкретную проблему, мы будем называть *приемлемой моделью*. Следовательно, если при исследовании объекта не верят в существование адекватной модели, изучение проводят с помощью приемлемой модели.

Возникшая в XIX в. философская школа позитивистов отрицала существование адекватных моделей и считала, что все модели, которые ученые строят для исследования естественных объектов, являются приемлемыми.

Несоответствие модели и объекта возможно по многим причинам. Здесь мы остановимся только на двух причинах, которые более всего подходят к данному контексту. *Первая причина* заключается в том, что язык моделирования отличается от «языка» исследуемого объекта или явления. Другими словами, модель и объект имеют различную природу. Это означает, что в случае адекватной модели должен существовать взаимно однозначный «перевод» с «языка» объекта на язык модели. Примером этой ситуации является изучение реальных объектов, для чего строятся, в частности, математические модели. *Вторая причина* состоит в том, что хотя объект и модель имеют один и тот же язык, они отличаются друг от друга. Подобная ситуация часто встречается в математике, когда для одного математического объекта строится математическая модель, отличная от этого объекта.

Независимо от того, ищем ли адекватную модель или приемлемую, необходимо, прежде всего, определить степень соответствия модели объекту. Для определения степени соответствия задаются определенного типа критерии, которые будем называть *критериями соответствия* и с помощью которых можно выявить искомое соответствие. Критерии соответствия — это процедуры, в результате проведения которых мы утверждаем, что предложенная модель соответствует или нет реальному объекту. В качестве примера таких критериев можно привести прием, который широко применяется в физике. Этот прием заключается в проведении физических экспериментов, цель которых — экспериментальная проверка результатов, полученных с помощью модели.

Упомянутые критерии одновременно выполняют несколько задач. *Во-первых*, на базе этих критериев строится доверие соответствующей общественности к результатам исследования. Другими словами, критерии соответствия являются также и *критериями доверия*. Соответствующая общественность, о которой мы только что упомянули, бывает двух видов. С одной стороны, к ней относятся сами исследователи (исследователь), которые проводят **исследование**. С другой стороны, к этой общественности относятся и другие группы людей, не участвующие в процессе исследования, но использующие результаты проведенного исследования. Для самих исследователей наличие или выбор критериев доверия является определенным индикатором начала, продолжения или окончания процесса исследования. Для остальной общественности эти критерии служат для определения того, в какой степени результаты исследования могут быть использованы в дальнейших исследованиях или рассуждениях.

Во-вторых, сама формулировка критериев соответствия, по существу, определяет тот язык, те понятия, что входят в язык моделирования, в рамках которого должны быть выражены результаты исследования.

Нахождение (установление) таких критериев соответствия часто бывает более сложной задачей, нежели остальная часть процесса моделирования. Результаты выполнения этого этапа являются критическими для всего процесса моделирования, ибо именно здесь определяется не только степень доверия к результатам исследования, но и сложность всего процесса моделирования.

14. Рассмотрим физику и математику с общих позиций моделирования.

Начнем с физики. До середины XIX в. любую физическую теорию можно рассматривать как одну модель. Однако электромагнитная теория Максвелла уже состоит из двух моделей, одна из которых соответствует механике Ньютона, описывающей столкновение отдельных заряженных частиц, а другая представляет собой уравнение Максвелла. Эту теорию нельзя представить как одну модель даже, если отвлечься от физического содержания, ибо ее составляющие части используют принципиально отличающиеся математические языки. Составляющие теорию модели практически никак не связаны друг с другом.

Аналогичную ситуацию мы встречаем в термодинамике Больцмана-Гиббса. Здесь также имеем дело с двумя моделями, отличающиеся друг от друга языком моделирования. Одна модель использует язык механики Ньютона, а другая – математическую статистику с теорией вероятностей. И в этом случае эти две модели никоим образом не связаны друг с другом.

В силу того, что в двух рассмотренных теориях одна модель никоим образом не связана с другой, то возникает вопрос: насколько необходимо использование механистической модели в этих теориях? Не является ли ее использование просто дань общей философской традиции? Другими словами, для описания физических явлений в рамках этих теорий, по всей вероятности, можно обойтись только одной моделью.

Несколько отличную ситуацию мы встречаем в квантовой механике. Здесь теория состоит из двух моделей с двумя различными языками моделирования, причем связь между этими моделями осуществляется с помощью принципа дополнительности Бора. Отсюда следует, что симбиоз из двух моделей представляет собой нечто, отличающееся от просто объединения двух отдельных моделей. Это отличие от просто объединения связано с наличием принципа дополнительности. Более того, этот симбиоз из двух моделей должен дать объяснения ряду экспериментов, каждый из которых использует свою математическую модель. Связь между симбиозом двух моделей и моделью эксперимента осуществляется в определенной степени с помощью принципа неопределенности Гейзенберга. При использовании принципов Бора и Гейзенберга большую роль играет субъективный фактор. Другими словами, результат проверки соответствия теории и экспериментальных данных является, на самом деле, *соглашением* внутри некоторого сообщества. Из сказанного следует, что ***квантовая механика является сложной системой***.

Из последнего утверждения вытекает ряд содержательных следствий. *Во-первых*, если квантовая механика, которая описывает некие процессы, протекающие в атомном ядре, является сложной системой, то и ***сам атом является сложной системой***. Но тогда для описания внутриатомных процессов *не существует* адекватной модели или модели, достаточно близкой адекватной. Это означает, что любые попытки построить адекватную модель для атома обречены на неудачу. *Во-вторых*, так как классическая физика рассматривает физические явления как простые системы и ставит своей целью найти конечное число физических законов, то все попытки ввести квантовую механику в рамки классической физики обречены на неудачу.

Из сказанного следует, что появление квантовой механики означает окончание периода в истории науки, когда безраздельно господствовали принципы, заложенные греками. Другими словами, появилась наука, принципы построения которой принципиально отличаются от греческих.

Перейдем к математике. Все исследования в рамках теоретической математики проводятся обычно на одной модели. Однако бывают такие случаи, когда используются результаты из других разделов теоретической математики. Этот случай можно свести к предыдущему, дополнив математическую дисциплину, в рамках которой проводится исследование конечным набором аксиом, каждая из которых является утверждением из других отраслей математики и используется в процессе исследования. После такого расширения теории можно утверждать, что исследование проводится на одной модели.

Более сложная ситуация возникает при решении вычислительных задач. Как мы уже указывали выше, в этих задачах одновременно используются две модели: теоретическая и прагматическая. Теоретическая модель представляет, по-существу, алгоритм решения задачи, а прагматическая модель – это набор вычислительных формул. Очевидно, что для одной и той же задачи может существовать несколько вычислительных алгоритмов решения, т.е. вычислительная задача имеет несколько решений. Другими словами, для одной теоретической модели может быть несколько связанных с ней прагматических моделей. Это значит, что в процессе решения задачи должен быть выбран *критерий выбора* (или *соответствия*) из нескольких прагматических моделей одной, с помощью которой и будет выполняться процесс вычисления.

Кроме того, необходимо иметь критерий решения задачи. В некоторых случаях эти два критерия совпадают. Именно наличие критериев не позволяет рассматривать две модели как одну. Но тогда ***процесс решения вычислительной задачи необходимо рассматривать как сложную систему***.

15. Одной из конкретных научных дисциплин, составляющих мировую науку, является новый тип математики, — *мировая математика*. Появление мировой математики не означает исчезновение ранее существовавших математик. Более того, появление и развитие новой математики оказало плодотворное влияние и на развитие европейской теоретической математики, открыв ей новые области и объекты для математических исследований.

Еще раз отметим, что европейская математика появилась на свет как *язык естествознания*, в то время как мировая математика появилась на свет как *язык моделирования управления* системами. Если основной задачей европейской математики было описание явлений природы, то основной задачей мировой математики является участие в подготовке управленческих решений. В силу этого мировая математика должна обладать специфическими свойствами, из которых отметим следующие.

Во-первых, целью практически всех задач мировой математики является получение конкретных количественных решений. Это значит, что мировая математика является дискретной математикой и оперирует, прежде всего, прагматическими числами. *Во-вторых*, так как задачи мировой математики связаны с управлением, то процесс их решения требует выполнения значительного числа вычислительных операций. Для решения этих задач и были созданы компьютеры.

С развитием компьютерной техники возникла компьютерная математика, которую можно рассматривать как часть мировой математики. *Компьютерная математика* – это, во-первых, собрание методов решения прикладных математических задач с помощью компьютеров, а во-вторых, различные математические теории, связанные с построением, развитием самих компьютеров и методов программирования. Она представляет собой новый тип математики, ибо объекты, с которыми она оперирует, принципиально отличаются от тех объектов, с которыми оперирует европейская математики. Одним из основных объектов компьютерной математики являются *компьютерные числа*.

Под *компьютерном числом* будем понимать пару (e, f), где e - целое число, представленное в цифровом позиционном представлении по основанию b и изменяющееся в соответствующем интервале значений, а f - дробное число со знаком в той же позиционной системе, что и e, причем общее количество цифр в обоих числах не превосходит числа p. Обычно предполагается, что $|f|$ <1. Величина p постоянна и зависит только от типа компьютера. Везде ниже будем предполагать, что $b = 2$.

Из приведенного определения следует, что существует лишь *конечное число* компьютерных чисел для каждого типа компьютеров. На множестве всех компьютерных чисел можно определить четыре, так называемые компьютерные «арифметические» операции. Эти операции принципиально отличаются от математических арифметических операций тем, что при их выполнении часто происходит округление. Поэтому компьютерные «сложение» и «умножение» не является ассоциативными и дистрибутивными операциями.

Множество всех компьютерных чисел вместе с «арифметическими» операциями, определенными на этом множестве, образуют *компьютерную арифметику*. Очевидно, что компьютерная арифметика отличается от математической и прагматической арифметик. Если математическая арифметика как математическая структура является полем, прагматическая арифметика – кольцом, то компьютерная арифметика не является никакой известной математической структурой.

Каждому компьютерному числу можно однозначно сопоставить прагматическое число, которое в двоичной позиционной системе имеет то же цифровое представление. Это сопоставление назовем *каноническим*. Используя каноническое соответствие между прагматическими и математическими числами, можно каждому компьютерному числу однозначно сопоставить математическое число. И это соответствие также назовем каноническим. Однако, очевидно, что не каждому математическому числу канонически соответствует компьютерное число.

Отсюда вытекает следующее важнейшее утверждение: ***утверждение, верное в рамках европейской теоретической математики, может быть неверным в рамках компьютерной математики***.

В качестве примера можно взять вычисление определителя матрицы. Легко привести пример матрицы, относительно которой доказывается, что ее определитель равняется нулю, в то время как вычисление этого определителя с помощью стандартной программы (например, Excel) дает ненулевой результат. В действительности, можно опытным путем показать, что одни и те же вектора, которые над полем математических чисел являются линейно зависимыми, часто над множеством компьютерных чисел не являются линейно зависимыми.

15. Для решения задачи с помощью компьютера ее необходимо запрограммировать. На программу можно посмотреть как на модель, записанную на языке компьютера. Таким образом, при решении вычислительной задачи с помощью компьютера мы имеем набор, состоящий из трех типов моделей: теоретико-математической, прагматической и компьютерной. Прагматическую модель можно рассматривать как модель теоретико-математической модели, а компьютерную модель – как модель прагматической модели. Очевидно, что прагматическая модель не является адекватной моделью теоретико-математической модели, а компьютерная – адекватной прагматической, ибо каждая из этих моделей использует свой тип чисел. Последнее утверждение также вытекает из того, что одной и той же теоретико-математической модели часто соответствует несколько различных прагматических моделей, которые отличаются друг от друга вычислительным алгоритмом. Аналогично, каждой прагматической модели соответствуют несколько компьютерных моделей, ибо одну и ту же задачу можно запрограммировать различными способами.

Важным следствием из приведенных выше утверждений является следующее: ***численное решение задачи существенно зависит от используемой программы, т.е.***

разные программы одной и той же вычислительной задачи обычно дают разные результаты.

Учитывая, что количество компьютерных чисел конечно, а математических – бесконечно, то мы приходим к следующему утверждению: ***процедура, которая в рамках математического анализа приводит к решению задачи, на множестве компьютерных чисел может не привести к решению задачи***.

Из этого утверждения вытекает, что при численном решении любой задачи с помощью компьютера *должен существовать критерий*, на основании которого можно утверждать, что полученные численные результаты можно принять за решение поставленной задачи. Этот критерий должен удовлетворять определенным требованиям. Такой критерий назовем *эффективным критерием*. Если при решении некоторой задачи можно задать эффективный критерий, то такую задачу будем называть *компьютерно определенной задачей*. Если же эффективного критерия не существует, то решаемую задачу будем называть *компьютерно неопределенной задачей*.

Рассмотрим в качестве примера задачу нахождения корня алгебраического уравнения $f(x)=0$. В этом случае легко задать эффективный критерий, который имеет вид: $|f(x_0)|\leq\varepsilon$, где число ε задается исследователем. Подобный критерий можно задать и при численном решении систем линейных уравнений. Поэтому указанные задачи являются компьютерно определенными задачами.

Другая ситуация возникает, когда приходится численно решать дифференциальные уравнения в частных производных при определенных условиях с помощью метода сеток. Результатом решения этой задачи с помощью компьютера является *конечный* набор компьютерных чисел. Здесь мы сталкиваемся с принципиальной методологической проблемой: вместо *неизвестной непрерывной* функции берется в качестве решения конечный набор чисел, который можно рассмотреть как *дискретную* функцию. Естественно возникает вопрос: какой же конечный набор чисел можно рассматривать как численное решение дифференциального уравнения? Обычным ответом на этот вопрос является: тот набор, который получается в результате применения вычислительного алгоритма! Но, как мы уже говорили выше, существуют разные вычислительные алгоритмы для решения одного и того же дифференциального уравнения, которые дают совершенно разные наборы чисел. Выбор вычислительного алгоритма для решения задачи является субъективным решением исследователя. Это означает, что в этом случае не существует эффективного критерия решения задачи, хотя и существует математическое доказательство, что выбранный вычислительный алгоритм приводит к решению уравнения. Поэтому указанная вычислительная задача является компьютерно неопределенной задачей.

Из того что не существует эффективный критерий для определения является ли данный конечный набор чисел решением данной задачи следует, что среди различных конечных наборов чисел *нельзя* указать набор, который не является решением этой задачи.

15. Для решения любой вычислительной задачи с помощью компьютера ее условие и способ решения необходимо перевести с математического языка на язык компьютера. Этот перевод осуществляется с помощью программы. На программу, в самом общем случае, можно посмотреть как на модель, использующую определенный язык программирования (с учетом компилятора или интерпретатора).

Таким образом, при решении вычислительной задачи с помощью компьютера используется симбиоз из трех моделей: теоретико-математической, прагматической и компьютерной. Отсюда вытекает, что любую вычислительную компьютерную задачу необходимо рассматривать как сложную систему.

Рассмотрение вычислительной задачи как сложную систему вскрывает ряд принципиальных моментов, которые не были видны при другом рассмотрении. *Во-первых*, решение задачи распадается на четыре взаимосвязанных этапа. Первый этап состоит в нахождении теоретического алгоритма для решения поставленной задачи. Этот этап протекает в рамках теоретической математики и сопровождается доказательством утверждения, что предложенный алгоритм действительно приводит к решению задачи. Второй этап заключается в том, что с помощью вычислительного алгоритма выбирается набор вычислительных формул, которые составляют прагматическую модель решения задачи. Третий этап заключается в программировании набора вычислительных формул. Компьютерная программа представляет собой компьютерную модель. Выполняя эту программу на компьютере, мы получаем некий конечный набор конкретных компьютерных чисел, которым канонически мы можем сопоставить математические числа. Наконец, четвертый этап состоит в принятии решения о том, является ли полученный набор математических чисел решением поставленной задачи. Для выполнения последнего этапа необходимо существование критерия, с помощью которого можно принять искомое решение. Этот критерий называется *глобальным критерием решения задачи*.

Глобальный критерий называется *эффективным*, если с помощью этого критерия можно определить, является ли произвольный конечный набор математических чисел решением поставленной задачи.

Очевидно, что в случае отсутствия эффективного критерия решения задачи нет никакой возможности определить, какой из произвольных наборов чисел является решением поставленной задачи. Другими словами, в этом случае отсутствует определенность в решении задачи. Поэтому такие задачи будем называть неопределенными вычислительными задачами.

В качестве примера неопределенных вычислительных задач можно привести задачи численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, которые можно решить только с помощью таких методов, как метод сеток. Другим подобным примером является численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью методов, подобных методу Рунге-Кутта.

16. Пусть теперь нам задана физическая теория, в основе которой лежит одно или несколько дифференциальных уравнений. К таким теориям относятся, в частности, теория Максвелла и квантовая механика, основанная на волновом уравнении Шредингера. Для получения проверяемых следствий из этой теории существуют два пути.

Первый путь заключается в том, что на предполагаемое решение накладывается ряд ограничений, которые позволяют вместо дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) рассмотреть более простую математическую модель, которая приводит к аналитическому решению. Эта вторичная простая модель, по существу, и является основой физической теории, а первичная модель (дифференциальное уравнение) использовалась в качестве теоретического обоснования вторичной модели в целях убедить соответствующее сообщество в правильности выбора окончательной модели теории.

Второй путь состоит в численном решении дифференциальных уравнений при определенных начальных условиях с целью получить некие количественные результаты для проверки с помощью эксперимента. В этом случае мы сталкиваемся с методологическими трудностями, которые были описаны в предыдущем пункте. В силу того, что нет никакой логически обоснованной возможности определить, является ли полученный в результате вычислительного процесса конечный набор чисел решением поставленной задачи, то у нас нет, по существу, что сравнивать с результатами эксперимента. Из сказанного следует, что *если для проверки физической теории необходимо численно решать дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений с помощью компьютера, то* ***такая теория является непроверяемой с помощью эксперимента.***

(1) Бунге М., Философия физики. М., УРСС, 2004

(2) Математическая энциклопедия

(3) Рассел Б., История западной философии. Chalidze Publications, N.Y., 1981

(4) Аристотель, «Метафизика». С.-Петербург, «Алетейя», 2002

(5) История математики. Под ред. А.П. Юшкевича, т.1, «Наука», 1970

(6) Розенбергер Ф., История физики. ГТТИ, т.1, 1934

(7) Аристотель, «Физика». Собрание сочинений, т.3, М., «Мысль», 1980

(8) Пуанкаре А., «О науке». М., «Наука», 1983

(9) Гейзенберг В., «Физика и философия», М., «Наука», 1989

(10) Эйнштейн А.,

(11) Гротендик А., «Урожаи и посевы». Ижевск, НИЦ РХД, 2001

(12) Клайн М., «Математика. Утрата определенности». М. «Мир», 1984